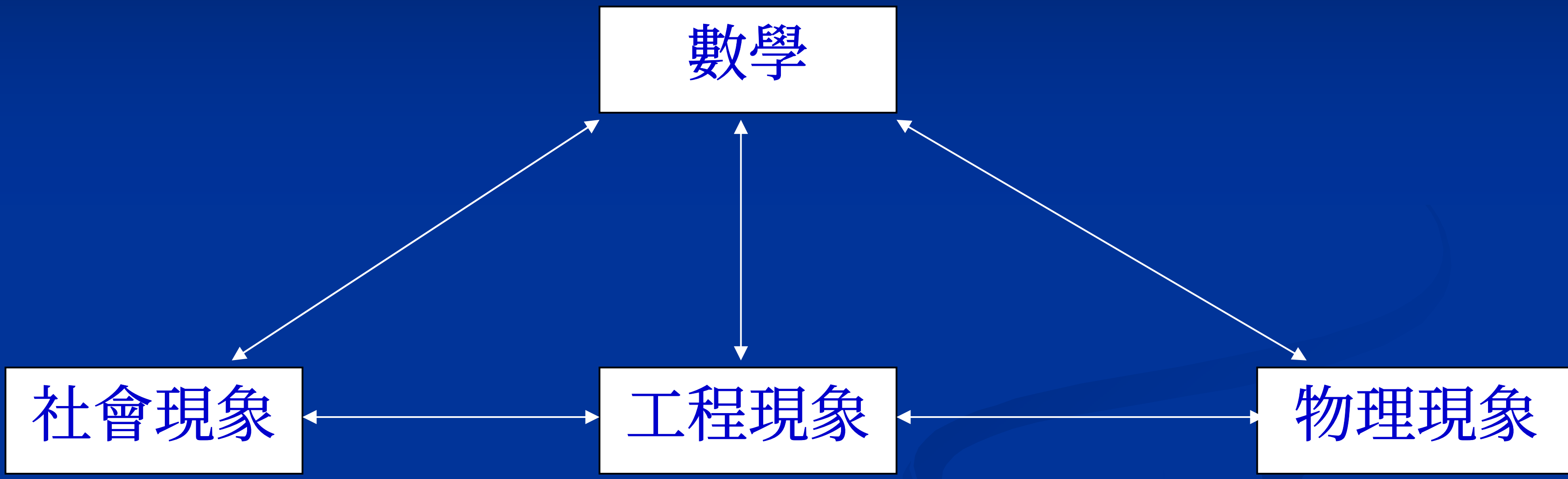
廿一世紀的數學展望

丘成桐教授

浙江大學
哈佛大學


數學
社會現象
工程現象
物理現象

- 數學和工程科學是社會科學的基礎
- 理論物理是工程科學的基礎
- 數學是理論物理的基礎

物理學上的統一場論

人類科技愈進步愈能發現新現象
種種繁複現象使人極度迷惘
(例如：湍流問題、黑洞問題)
但是主宰所有現象變化的只是幾個少數的基本定律。
Standard model (標準模型)
統一了三個基本場：電磁場、弱力、強力
但是重力場和這三個場還未統一

重力場由廣義相對論描述，是狹義相對論和牛頓力學的統一理論而形成的。

這是愛因史丹最富有想像力的偉大創作。

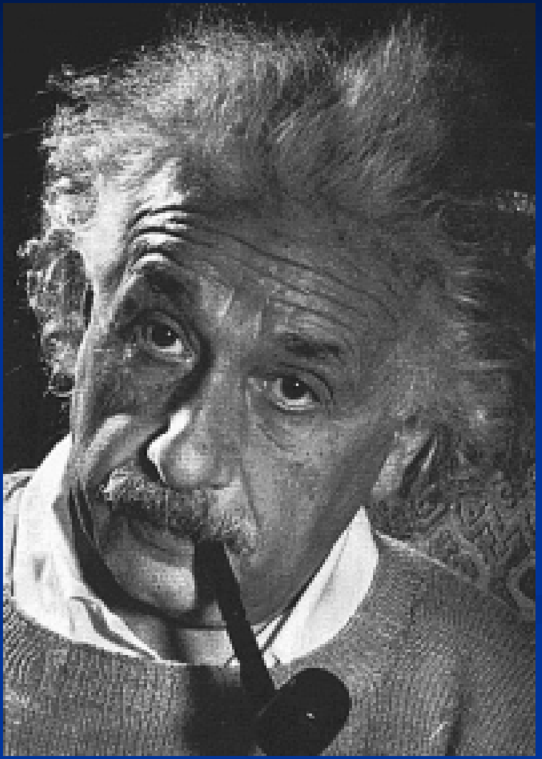
愛因史丹方程是 $$R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij}=T_{ij}$$

其中 gij 是測度張量（引力場），Tij 是物質張量

Rij 是Ricci曲率張量

黎曼幾何學從這個方程進入到物理學的核心部分：

時空的變化



數學上的統一？

弦理論希望統一重力場和其他所有場。

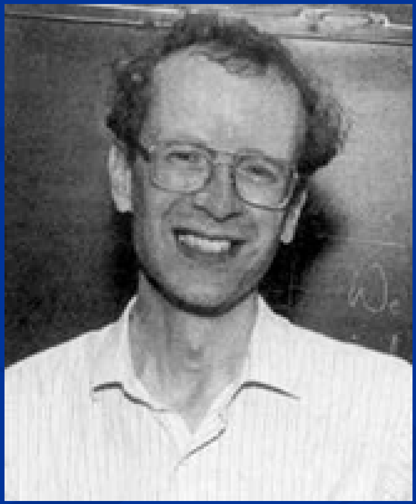
在廿一世紀，基本數學會遇到同樣的挑戰：

基本數學會朝統一的方向發展，只有在各門分支大統一后，這些分支才會放出燦爛的火花，而我們才會對這些學問得到本質性的了解。

數學的大統一將會比物理的大統一來得基本，也將由統一場論孕育而出。
弦論的發展已經成功地將
微分幾何
代數幾何
群表示理論
數論
拓撲學
相當重要的部分統一起來。數學已經由此得到豐富的果實。

大自然提供了極為重要的數學模型，物理學和工程學上很多模型都是從物理直覺或從試驗觀察出來的。但是數學家卻可以從自己的想像，在觀察的基礎上創造新的架構。

成功的數學架構往往是幾代數學家共同努力得出的成果，也往往是數學中幾個不同分支合併出來的火花。例如，Andrew Wiles的工作就是由橢圓曲線理論和Automorphic form理論，表示論和交換代數理論的合併得出來的結果。



數學的對象和工具

幾何、數字（尤其是整數）和函數的架構可以說是數學裡最直觀的對象，因此在數學的大統一過程中會起著最要緊的作用。數學分析和代數則是研究這幾門學問的主要工具，也是基本數學和應用數學的主要橋樑。

數學的發展

數學的發展由一個變數到多個變數，由一維到高維空間，由可換群到非交換群，由低次方程到高次方程，由線性方程到非線性方程，都是不可逆轉的趨勢。凡此種種，都隨自然而生，始得華茂。有些數學家逆時發展一些數學結構，難以得到豐盛的果實。

中國古代哲學家就主張一切事物的發展都須順應自然。

- 老子：“ 人法地，地法天，天法道，道法自然 ”

- 孫子兵法：“ 故兵無常勢，水無常形。能因敵變化而取勝者，謂之神。 ”“ 激水之疾，至於漂石者，勢也。 ”

數論

找尋數學方程的整數解是算術中一個重要的問題。對一次方程組，中國數學家對同余的方法有很重要的貢獻，因此數學史上有著名的中國餘數定理。

在現代計算機和密碼理論亦用到這個同余的方法。

對任何一個素數p，我們可以找尋方程在p同余的意義下的整數解（同時也考慮p^n的同余解）。這種解的個數可以由計算機算出。假如我們將這些數據全部放在一起，就可以構成所謂L函數，這是數論中最重要的函數。

它是一個很美妙的函數，既有乘積又有無窮級數的的表示，它的數論意義極為重要，因此它有很多特殊的性質。

L函數是個複函數。它有很多重要的解析性質。從Artin, Weil, 一直到Langlands都想了解它。在六十年代時，Swinnerton－Dyer－Birch對L函數在零點的消減次數和橢圓曲線的整數解做出一個極為深刻的猜想，影響了五十年來的算術理論。這個猜想在多複變方程組時還沒有很好的推展。（Beilinson的猜想就是其中一種嘗試。）

Swinnerton－Dyer－Birch猜想可以用來解決一些難題。一個數學上最古老的問題就可由它來解決:

找出所有正整數n，使得它是一個有理直角三角形（三個邊的長度都是有理數）的面積。例如6=4×3/2，而{3，4，5}是直角三角形的邊的長度。

這個問題由Tunnel在八十年代解決，但他需要假定Swinnerton-Dyer-Birch猜想的真實性。

二十世紀的數論學家透過代數幾何的方法已經將整數方程與幾何結合，群表示理論則提供數論和幾何學結合最重要的工具。在數論裡的Galois群和在幾何學裡的規範群，都與群表示有關。五十年來，我們看到數論和幾何的研究從可交換群發展到非交換群的表示理論。產生了Langlands理論和Yang－Mills理論。他們都在現代數學上佔有重要地位置。

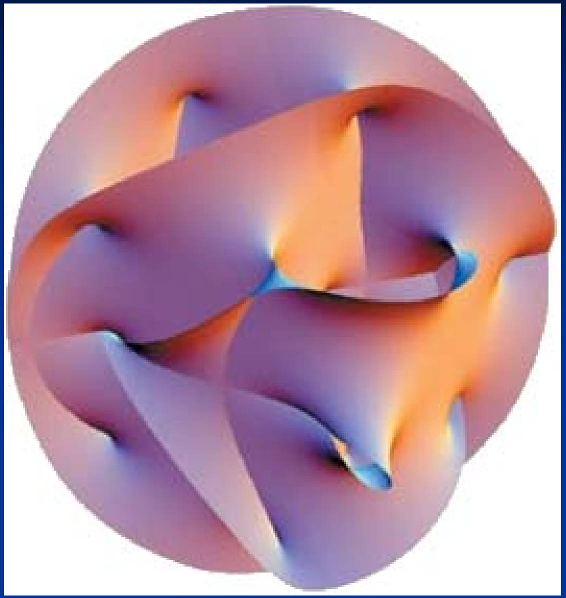
在Langlands理論的想法中，一般算術流形上的L函數可由所謂Shimura流形的L函數生成。在橢圓曲線的特殊情形下推出所謂Shimura－Tanniyama－Weil猜測。而這個猜測由Andrew Wiles十年前證明，他透過Frey，Serre和Ribet的貢獻將困擾了數學界近三百多年的Fermat猜測完全解決。就是說以下方程:

$$x^n + y^n = z^n$$

在n≧3時的整數解必定在{0,-1,1}的集合中。

Taylor是Wiles的學生，除了對上述Shimura－Tanniyama－Weil猜測工作有重要的貢獻外，他最近還解決了一簇橢圓曲線上的Sato－Tate猜測。這是關於橢圓曲線對素數同余解的數目分佈問題，它的分佈與物理學家E. Wigner在量子力學所用到的分佈極為相似，Tayler的理論將數論帶進一個新的方向。

在二十一世紀我們可以預見數論函數的理論會有長足的發展，也希望他們的理論會跟幾何、物理學逐漸凝結在一起。弦理論上的一個重要的代數流形叫做Calabi－Yau空間，它可以說是橢圓曲線的自然推展。我們已經逐漸見到弦學上的對偶理論在深刻地影響著Calabi-Yau空間的了解，所以也可以想像他們會在算術上有特殊的貢獻。



這二十年來數論學家發現很多算術函數的分佈狀況與大型矩陣領域上的譜積分有相似的地方。而后者在統計物理中卻經常出現。四年前Vafa和他的合作者們從弦學的理念中將這些古典的矩陣積分推展到更一般的情形,並發現這些積分與Calabi－Yau流形裡的全純形式積分有關。我們有理由相信弦理論會提供數論和幾何結合的橋樑。

幾何和拓樸

在十九世紀中葉，複變函數開始奠基。因此刺激了各門數學學科的發展：

數論函數（如黎曼zeta函數）得到嚴格的處理，解析數論這門學科因此而生。

多葉函數的出現則引起了黎曼曲面的定義。

到了二十世紀，Poincare證明了黎曼曲面上存在唯一的曲率等于-1的黎曼度量。率先引入幾何和群論的方法來研究曲面，並得出自守形函數和雙曲幾何的密切關係。

由於對多體力學問題相空間的構造問題，Poincare 對高維空間產生濃厚的興趣

也開始奠定拓撲學的主要基礎。一般來說，在研究空間的大範圍架構時。拓撲學家希望將空間用代數的方法進行分類。用同調群和基本群來控制空間的架構。他們在研究空間時引進三角化和組合的方法，但對微分拓撲來說主要的方法乃是切割（Surgery）子流形。

- 高維空間用到Thom的Cobordism理論。Smale則更進一步由Morse理論悟出的handlebody理論，得以將高維空間的分類變成計算同調群，特徵類和由基本群所產生的代數不變量。高維空間理論中一個重要的工具是由Whitney發展出的一個方法，但是Whitney的方法要依靠到空間中二維子流形在一般情形下不相交。

由於一般曲面在三維和四維空間會自行相交。因此切割方法在低維空間遇到很大的困難。可是三維和四維空間恰恰是物理學家最為關心的空間。在愛因斯坦發現廣義相對論后，我們知道空間會受到重力場影響而變更曲率，空間的拓撲亦隨之變動。

二十一世紀幾何學的發展有相當重要的部分會是有組織地解決三維和四維空間的問題。除了它們的拓撲性質外，更重要的是空間上的幾何和分析問題。

我們從二十世紀黎曼曲面的發展可以約略地猜測未來這個世紀幾何和拓撲學的走向。

黎曼曲面在代數幾何、數論、分析、微分幾何和複動力系統都佔有重要的地位。

在代數幾何裡，它又叫做代數曲線。義大利幾何學家們用射影幾何的方法對它做深入的了解並作為工具去研究高維空間的代數流形。這種看法仍會是代數幾何的主流。弦理論一個重要的貢獻就是對代數曲線的個數的算法得到漂亮的公式。Mori的著名工作也是奠基在相當一般的代數流形裡構造有理曲線。辛幾何的發展則奠基于研究擬全純（pseudoholomorphic）曲線的架構。

這些表面不同的理論已經逐漸融合，當它的理論完美發展後，將會成為數學中具有威力的工具。

在數論上我們知道古典的modular form都是在代數曲線上定義的扭曲的複函數，而曲線上Riemann－Roch公式則往往給出這些函數的描述而因此得到很多重要的算術內容。例如它們可以描述一個正整數寫成不同整數的power的和的個數。

由Poincare、 Koebe等人發展的單值化原理使我們知道黎曼曲面都可以看作單位圓面透過離散群得出來的商空間，而這些離散群可以看作二次矩陣群的子群。Poincare因此將離散群引入自守函數和黎曼曲面理論中，他因此得出新的方法來構造自守函數。

黎曼曲面有很多獨特的性質，而其中最重要的一點是上述的單值化原理。任何一個單連通的曲面都可以用保持角度的方法映射到球面上面去。正如我們現下用的地圖是從地球保角不變地映射到平面上。當一艘船只在海上航行時，船長可以在地圖上找出準確的方向就是因為保角的緣故。我們發現這種保角投影對任何二維曲面都可以辦得到。

單值化定理的證明多姿多彩。最一般和最重要的證明由Morrey先生在1938年給出。他所需要函數的光滑性不多，在二十世紀非線性分析中占了重要的地位。無論二次二維非線性微分方程和複動力系統的理論都以它為基礎。

在高維空間的單值化也是一個重要的問題,
如何找出具體而有意思的問題是很重要的,
在複幾何的情況下，我在七十年代提出的一系列問題已得到一些解答，但是即使在這個情形下還未全部完成。我曾經證明複空間的 Poincare 猜想, 在二維空間時答案是完滿的，但是以下的高維的複Poincare猜想還未解決: 如何證明同倫於射影空間的代數流形必須是射影空間。

黎曼曲面第二個重要基礎就是如何去描述在非單連通的曲面上所有保角結構。從複函數的觀點來看，這就是Teichmuller空間的建立。而從代數曲線的觀點來看，它的商空間是代數曲線的模空間。模

空間和Teichuniler空間的關係通過 mapping class group這個群的表示理論值得到多所考慮。如何具體的表示這兩個空間也是個重要的問題。例如如何找到典型的方法將 Teichuniler 空間嵌入複歐氏空間中。

二十世紀中葉以後人們對它們的架構有一定的了解，在二十一世紀我們會繼續努力。尤其在這兩個空間的調和分析和其中的子流形問題。

弦理論開章明義是研究曲線在時空中振蕩的所有經驗。而曲線的軌跡就是一個黎曼曲面。弦理論因此對代數曲線的模提供了很多新的數學公式。例如E.Verlinder和Witten的公式，

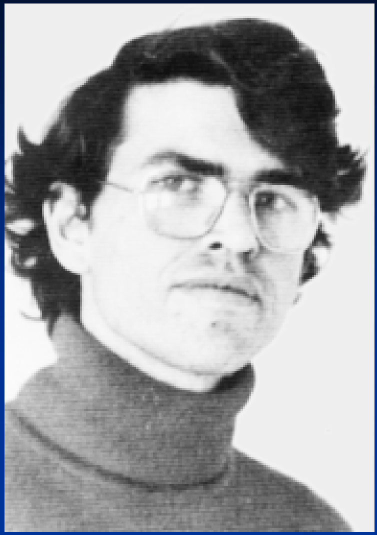
這兩個公式的證明在這十五年來的數學界有深入的影響。

三度空間和四維空間是時空本身的幾何,可是我們對他們的了解遠沒有對黎曼曲面來得深入。可以想像的是本世紀的數學將會促使二維空間的研究提升到三維和四維空間。而將它們變成幾何和理論物理的主要工具。

三度空間的拓撲始于Poincare。他提出著名的Poincare猜想。以後經歷Dehn， Kneser， Haken， Waldhausen直到Thurston才理出一條清晰的思路。

Poincare認為對任何一個封閉的三度空間，如果任何一條閉曲線都可以連續地收縮到一點，則這個空間必定是三維球面。

這個漂亮的問題吸引了數學家一百年。不單是因為它是一個難題，也因為它是研究三度空間的一個最基本問題。在1978年，Thurston提出全面了解三維空間的幾何化猜測。他認為所有緊致封閉的三度空間必可由八種具有不同幾何架構的三度空間構成。除了三維球和商空間外，最重要的乃是雙曲空間。



在所謂“ 足夠大 ” 的三度空間情形下，Thurston証明了他的猜想。但是他的方法不可能推展到最一般的三度空間上。

1980年， 我的朋友Hamilton發展了一套非線性微分方程組。他利用幾何空間的曲率（Ricci曲率）來變動空間的幾何。因此得到一些漂亮的定理。于是我建議他用這個方法來證明Thurston的幾何化猜測。

這是數學史上一個非常艱巨的事業。用到的工具是非線性方程和黎曼幾何的理論。三十年來我們幾何分析學家創造出來的定理都投入到這個研究領域裡。

Hamilton首先在正曲率的情形下解決了方程收斂性問題，奠定了重要的基礎。這裡僥倖地避開了微分方程的奇異點問題。但是在一般情形下，奇異點是不可避免的。Hamilton花了二十年的時間去研究奇異點的性質。

對于一個非線性微分方程組，奇異點的架構極為複雜。所幸Hamilton方程乃是拋物形方程，它有比較好的性質。我在1985年與李偉光剛好完成在流形上的線性拋物方程的精細估計。我向Hamilton提出要將這個估計用到他的方程上。

Hamilton因此提出了新的看法來接納我的建議。他看出我和李偉光的估計辦法最好在由他的方程產生的孤立子上去研究。孤立子有很多特殊的性質，因此我們的估計比較容易了解，也可以推展到Hamilton的方程。

在1990年，Hamilton成功地推導了這個估計而得到奇異點的深入研究。這些研究可以說有劃時代的重要性。在1995年，他在適當的條件下，找到全部了解Thurston問題的方法。這是極有深度的研究。

但是還有一些奇異點的問題尚未解決。如何控制奇異點切除的問題要到三年多以前俄國人Perelman的工作后才有頭緒。

Perelman對上述Li－Yau－Ham

估計做出更深入的了解，仿照

方法，引進了新的時空上的長

積來控制奇異點的變化。

這些研究極為複雜。三年來很多人嘗試補上

Perelman遺留下來未證明的空白。直到最近，朱熹

我們可以想像二十一世紀的數學家將會花很多功夫來消化和深入研究這些空間的幾何和調和分析。然後將三度空間的幾何應用到物理學，數論和代數幾何中去。

微分方程組的奇異點是十分重要而又非常困難的問題。在工程上，在物理上，在計算數學上都遇到同樣的問題。流體力學和廣義相對論首要的問題就是如何處理奇異點。上述三度空間的方法應當會有更大發揮威力的地方。除了上述方法成功地處理奇異點外，古典的代數幾何有Hironaka理論，用blow up的方法成功地處理代數空間的奇異點。希望這些方法能夠得到統一。

四維空間的研究極為困難。到目前為止連一個讓人信服的猜測都沒有。最重要的四維流形是由代數曲面形成的，但目前人們還沒有辦法將其作細致的拓撲分類。四維空間拓撲的第一個突破是由Donaldson引入Yang－Mills理論完成的。以後Seiberg－Witten在九十年代得到另一個突破。總體來說，前途還很漫長。這將是幾何學、幾何分析學、代數幾何學以及物理學一個共同的研究領域。幾何分析是我們在七十年代發展出來的理論，在一九七六年我利用 Kahler Einstein 結構來證明了複的 Poincare 構想，因此一直來都深信用非線性方法來構造Einstein 度量，是構造幾何結構的主要方向。

在四維空間還有一個極為重要的幾何結構就是 self-dual 度量的存在性，Taubes 在相當一般的情形下，證明它的存在性，但是在四維拓樸的發展中沒有得到應有的注意，問題在於我們對它們的模空間不了解，無從給予拓樸不變量的意義。無論是 Einstein 度量或self-dual 度量，它們在四維空間時的幾何意義都需要深入的研究，self-dual 空間的 twistor space 有自然的可積複結構，這個結構值得去探討，應當和代數幾何的方法甚至弦理論有關。

四維到八維空間都有重要的幾何和物理意義。六維有Calabi－Yau空間，七維有G2空間，八維有Spin(7)和hyperkahler空間，它們在弦理論中都佔有重要的位置。這些空間的研究牽涉到數學不同的領域。我們對它們的存在性和模空間仍不甚了了。

六維以上的幾何架構除了上述以外，最重要恐怕就是複架構的存在性問題。非代數的複流形可能會成為二十一世紀數學的一個重要方向。最近弦學家也在考慮這些架構。我們希望它們的研究對代數流形會有幫助。高維的代數流形的分類大致上需要更靈活的結構來幫忙，正如 Cobordism 理論，我們可能需要在更大範圍的複空間來考慮流形如何改變它們的拓樸和子流形。

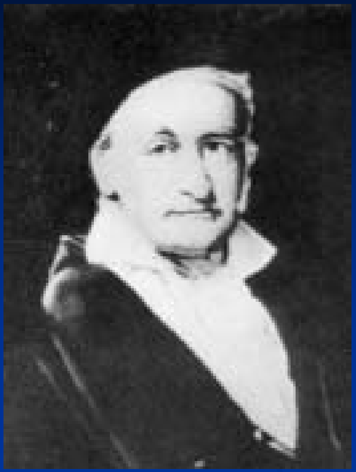
由於Blowing down 並不保持代數複流形這種結構，流形的有理結構的分類可能要包括非Kahler的複流形。

弦理論發現有不同的量子場論可以互相同構（isomorphic），然而scale剛好相反。在半徑為R的圓上的場論與半徑為1/R的圓上的場論同構。因而推出某些強Coupling Constant的理論可以同另一個弱Coupling Constant的理論同構，而后者可以從漸進分析理論來計算。(Coupling Constant 可以解釋如下，假設場論由 Lagrangian L 給出，我們可以產生新的場論，其Lagrangian 是L+CL’ 這個常數 C 就是 coupling constant)。

由於R→1/R這種奇妙的對稱可以保持量子場論的架構，使得我們可以用擾動性的方法去計算非擾動性的場論，在數學上有驚人的結果。最動人心弦的定理乃是由此引出的鏡對稱可以用來找出Calabi-Yau 空間中代數曲線的公式。

更要注意的一點是時空的架構可能因此有基本理念的改變。極小的空間不再有意義。時空的量子化描述需要更進一步的探討。物理學家和幾何學家都希望能夠找尋一個幾何架構來描述這個量子化的空間。有不少學人建議用矩陣模式來解釋這種現象，雖然未能達到目標，但已得到美妙的數學現象。

約在兩百年前，Gauss發現Gauss曲率的理念而理解到內蘊幾何時，就覺察到空間的理念與時而變與人類對大自然的了解有密切關係。



這二十年來，超對稱的理念深深地影響著基本物理和數學的發展。在實驗上雖然尚未發現超對稱，但在數學上卻起著凝聚各門分支的作用。我們寧願相信在極高能量時，超對稱確實存在。但如何看待超對稱在現實時空中的殘餘，應當會是現代應用物理和應用數學的一個重要命題。

- 舉例來說，在超對稱的架構中，規範場和電磁場會與完全不相關的子流形理論同構。是否意味著這種日常能見的場論可以用不同的手法來處理？
- 對偶的看法使得我們猜測複幾何和辛幾何有對偶的關係，大部分重要的動力系統可以在辛幾何的架構上來考慮，這是否意味著很多重要的動力系統問題可以變成複幾何問題來處理。

在空間中找尋雅致的子流形是了解空間的一個重要環節。在我們見到平坦的空間裡，我們就看到很多漂亮圖形。但是在三維球裡，這些圖形會改變。在三維的圓環裡，二維球不能連續地收縮成一點。這些二維球卻提供了空間的重要訊息。

微分幾何學家對子流形的研究有很長久的歷史，也應用它們到空間結構上去，但是沒有有系統的結構性的研究。弦學理論卻提供了這樣的結構。

在弦理論的影響下，有很多不同的子流形受到重視。它們叫做Brane。弦學家不單考慮子流形，還考慮子流形上的規範場。這一點為數學家提供了新的看法。

在十年前，我和一位博士后Zaslow就用這種新的看法找出K3曲面有理曲線的個數問題。我們發現這些數字與modular form有關。對代數幾何學家來說，這是值得驚訝的結果。后來，Strominger、Zaslow和我又發現有些子流形（special Lagrangian cycle）對對偶空間提供重要的訊息，這些流形與代數流形同樣重要。

一般來說，我們希望用拓撲或代數的方法來描述有宏觀意義的子流形，在這個領域裡，最重要的問題無過于Hodge猜測。

Hodge猜測的重要性在於它提供一個有效的方法去描述代數流形裡面可用多項式來定義的子流形的同調群。無論在代數、算術、還是在幾何裡，這都是舉足輕重的猜測。對于這個世紀的數學發展，這應當是一個重要的命題，很可能是幾何分析一個主要目標。在數論裡，由Grothendieck、Deligne以來發展的motivic理論試圖理解這些子流形。Tate猜測則在算術流形上考慮同樣的問題。

我本人相信應當將代數流形推廣到一般的複流形來考慮Hodge 猜測，同時應當考慮更一般的子流形。

數論學家為了研究算術而大膽地改變空間的定義。他們所引進的概念可能在現象界會有真實的意義。其中一個重要的幾何叫做Arakelov幾何。它在Faltings證明Mordell猜測時得到應用。這是很吸引人的一種幾何。我們不單考慮在複數上定義的空間，也考慮同余于p的空間，而且要將所有這些空間一同處理。這種空間是否含有物理意義？

從相反的觀點來說，弦學家提出holographic principle，希望用空間邊界上的知識來確定空間本身的物理狀況。他們發展出AdS/CFT的理論已經得出很多豐富的幾何結果。

但是數學家還沒有提出很好的辦法來描述這個principle. Hilbert 提出過一個問題可能與它有關: 在流形的邊界上任何兩點的距離已經決定，可否決定流形的幾何。

函數結構和分析學

現下來談談數學分析。從微積分發展以後，數學分析在Euler，Lagrange，Gauss，Fourier等人的大力發展下已成為基礎數學、應用數學、工程學、經濟學和物理學不可缺少的學問。從上述的討論亦可以看到，近幾十年來發展的幾何分析是構造幾何架構不可或缺的工具。

牛頓力學中第一個重要問題就是引力問題。星體問題的研究沿襲至今，產生了動力系統很多重要而漂亮的問題。由於Poincare，kolmogorov， Arnold， Moser 一直到最近Mather，Hermann等人的工作，我們曉得星體問題的複雜性，尤其是三體問題已經出現了Chaos的現象。這個動力系統的理論變得極為困難，尤其是 KAM 的理論只有在輕微擾動時始能成立。在非擾動的Hamilton系統沒有強有力的辦法來了解多體的穩定性。非線性常微分方程組多姿多彩，他們的深入了解應當可以幫助偏微分方程的研究。

動力系統用到的辦法影響了幾何學中的測地線研究，例如geodesic流的ergodie理論，閉測地線個數的問題。Morse在這方面有大貢獻，以後又有Conly的工作，geodesic的理論在微分幾何中發展很快，例如equavarant cohomology 在證明閉測地線的存在和算他們的個數起了很大作用，閉測地線的長度和Laplacian算子的譜有密切的關係，也許這些理論可以反過來幫忙多體問題。

在流形上，我們可以想像用點結合起來形成圖后，用多體問題方法來處理其上的幾何動力問題。事實上在處理Hamilton 的Ricci流時，Li-Yau Hamilton 和 Perelman 引入的時空上的路線積分基本上是Hamilton 力學得出來的Lagrangian。

歷來科學家都很重視多體問題， 尤其是體數很大的時候，無論古典或量子化的多體問題，都還有很多困難。一般說來，統計物理提供主要的方法。從Morrey開始到Varadhan和姚鴻澤等人的工作我們發覺流體方程可由多體問題推導。Dyson，Leonard，Lieb等人都為量子多體問題的穩定性做出重要的數學結果。

- 粒子極多時， 我們可用流體方程來逼近粒子的變化， 但是粒子的殘餘性質不見得全部由連續方程吸收。尤其是粒子不算太多也不算太少的時候， 古典的流體方程和Navier－Stokes方程未必能夠準確地描述粒子的所有物理現象。反過來說研究流體方程的學人亦企圖用粒子的隨機過程來逼近和描述方程的動態變化。在各種重要的線性或非線性方程加上隨機過程將是數學應用到工程學上一個重要方向。

除了流體方程和描述表面張力的方程外，十九世紀的分析學家大致上致力于線性方程的研究。基本波動方程的模式是線性的（波的疊加成線性現象）。另外一個基本原因是任何非線性方程的研究必須奠基于線性方程的深入了解。（到目前為止，非線性方程的嚴格處理大致上仍在于控制它們的線性化方程。）

十九世紀時數學家對Laplace算子、熱傳導方程、波動方程和Tricomi方程這些線性方程做了深入的研究。種種不同的積分變換如Fourier、Laplace變換等成為數學分析的重要支柱。Fourier級數的發現有劃時代的重要性，它與線性算子的譜分析有密切的關係，它與積分方程理論引起了Hilbert空間的發現。Laplace算子和Dirac算子的譜分析在群表示理論、數論、幾何學上都有重大的意義。舉例來說，Dirac算子的研究導致Atiyah－Singer指標定理的證明，在現代數學上有重要的貢獻。

各種不同的積分變換除了幫忙解決線性微分方程式外，也將Euler的發散函數理論得到嚴格化，Zeta 函數因此得到解析延拓(Analytic continuation) Fourier 變換可以用來證明Poisson Summation formula，這個公式仍然是一般函數作解析延拓時的主要工具，可是數論上重要的L函數的延拓問題還沒有全部解決，它有深遠的算術意義，我們需要新的解析延拓的工具，有了解析延拓，泛函方程 (functional equation) 才有意義。

有了泛函方程我們才知道這些函數的對稱關係，這些函數的零點因此有特殊的性質，因此

黎曼猜測**Zeta**函數的主要零點是在**Re s=1/2**的線上，我們當然希望黎曼和廣義的黎曼猜想得到解決，這些問題有深遠的算術意義，它們可否單用解析方法去全部解決，是值得思考的，它是否跟離散群、算術幾何、譜分析或數學物理有關。在弦理論中也產生了很多有算術意義的函數，它們的解析延拓還未解決，它們的算術性質值得去研究。它們有沒有適當的泛函方程呢？

一般來說在分析中，我們希望找到一組簡單而易於控制的函數來表示任意一個函數或一個波，除了正弦和餘弦函數外還有各種正交多項式**orthogonal polgromial**，函數不同的表示引導出不同的收斂的方法,這些問題極為有意義，**Carelson** 著名的**L²** 函數收斂定理可說是分析學中劃時代創作。有界函數卻有截然不同的表現，**Carelson**解決的一維的複函數理論的**Corona**問題還未推廣到高維空間，在高維複幾何中，這是有迫切需要的。我們對有界全純函數組成的**Banach**代數理解不深。這些**Banach** 代數的譜分析還待深入研究。

在十九世紀中葉，多維變分法開始發展。當時研究主要集中在Lapalce算子（Dirichlet原理），以後推展到一般的橢圓形算子系統，成為方程解存在的一個主要辦法。

調和分析和勢場理論對Laplace算子提供了深入的了解。我們也因此有一個基礎去研究非線性橢圓方程的正則性問題，從而解決了各種幾何和物理上遇到的存在性問題。

儘管如此，我們對非線性橢圓微分方程組了解還是不夠深入，他們解的奇異點還待了解。本世紀會從幾何和物理的觀點去探討。正如Hamilton工作中對奇異點的處理將會提供我們以後工作很多提示。各種不同的Scale會出現，如何有效處理scaling 可能會從物理學裡得到啟示。

橢圓方程描述與時間無關的幾何或物理狀況。動態的方程極為困難，進展也比較緩慢，如何尋找非線性量的估計是主要問題。一般的能量估值是積分估值，不足以控制極為精細而有趣的現象。

拋物方程與橢圓方程比較接近，其正則性也比較容易處理。上述的Hamilton、李偉光和我對拋物方程組的研究提供了非線性拋物方程一個有用的估值原則。我們在這些方程的特殊解（soliton）中先得到一些重要的量，然後利用極大值原理來證明它在一般情形下滿足不等式。Hamilton和我發現這個原理是一般拋物方程共同的基本特性，是處理奇異點重要的工具。除了處理Ricci流外，它在應用數學裡應當能發揮作用。

拋物方程不單有它本身的幾何和物理意義，它對橢圓方程也提供了新的方法。舉例來說，線性的熱方程是連接局部幾何和流形上譜的一個橋樑。從物理上說這是古典力學過渡到量子力學一個過程。從這個觀點來看，一個與時間無關的方程在尋找解時，很可能透過拋物方程得到深入的了解。

二十一世紀的微分幾何一個最重要的問題是Einstein方程解的存在性問題。在代數流形的理論裡有所謂幾何穩定性的理念。二十年前，我提出方程存在性與這種穩定性有關。這個想法已經成為一個重要的研究方向。在研究Kahler流形上的度量問題上，最重要的突破是由Donaldson作出的。這種穩定性的研究與辛幾何裡面的moment map密切相關，假如我們認為辛幾何和複幾何對偶，我們或許可以更透徹地探討這個現象。

我相信大部分的微分方程組會有相似的現象。我們可以人為地加上時間而構成新的方程組。當時間趨于無窮時，希望找出原方程的解，或帶奇異點的解。（奇異點的存在性會與上述方程的穩定性有關。）這種穩定性應當比古典的概念來得廣泛，它與代數幾何裡的幾何不變理論密切相關。

非線性波動方程比拋物方程困難。其中一個主要原因時在有限的速度下，我們沒有很好的方法去控制不同的波互相消滅的辦法。在可積系統的波動方程中，有所謂inverse scattering的方法將非線性方程轉變成比較容易處理的線性方程，從而問題得到解決。Glimm對一維空間的Conservation law和以後非線性Schordinger方程的研究都對非線性波動有一定貢獻。然而流體學家的擾動方法、幾何光學和WKB的半古典方法都還需要嚴格的處理。一般來說，大範圍和長時間的波動方程的處理僅在弱場的情形下比較成功。例如Christodoulou－Klainerman在廣義相對論方程的貢獻。

有物理或幾何意義的方程往往是橢圓方程、拋物方程和波動方程的組合，Navier－Stokes方程就是一個很好的例子。如何處理這種組合是一個挑戰。如何研究這種方程組的scale問題無論在數值分析或理論上都需要解決。微分方程的穩定性分析可能需要更前一步的了解。如何處理帶奇異點的解的穩定性？一個重要的例子是廣義相對論中的Kerr解的穩定性，至今仍未明朗。另外一方面，線性方程組的研究還需更進一步的發展，群表示家將線性微分方程組的理論發展得淋漓盡致，調和分析，hyperfunction 和 D-moduli理論，都是他們的工具。

在上述所有討論裡，有兩個重要的理念在物理、數學和應用科學中都是非常重要的：

第一個是scale的問題。理論物理學的Hierachy問題就是一個例子。引力場和其他力場的scale相差極遠，如何統一，如何解釋？在古典物理，微分方程、微分幾何和數值分析中都有不同scale融合的問題。在統計物理和高能物理中，用到所謂renormalization group的方法，是非穩定性系統的一個重要方法。

第二個重要的理念是Symmetry（對稱）

群和群的表示論的理念

有限群：如鏡對稱、雪花對稱、

數論中常用的Galois群。

連續群（李群）：在規範場論中

起著重要的作用。

非緊離散群：在數論和幾何上的用途。

無限維對稱：規範場中的規範群。

Duality比Symmetry更廣義，不同理論的廣義同構將

是二十一世紀重要命題。

- 對稱的理念可說是各門科學中最基本的工具。但運用之妙，存乎一心，在于作者的經驗和直覺。二十一世紀基礎科學的基本命題：如何將對稱的物理基本現象與非對稱的世界聯合？

Symmetry Breaking

眾生色相，何由而生？

- 基本的物理定律是時間對稱的，為何我們擔憂時光消逝？因為直觀世界不是時間對稱的。由時間對稱的定律來解釋直觀世界是現代數學和物理的一個重要問題。

熱力學第二基本定律說：Randomness隨時間而增。Boltzmann發現Entropy也隨時間增長。這是一個奇妙的定理，到如今還未得到徹底的了解。

時間的箭咀在廣義相對論中是一個重要的題目。Roger Penrose和Hawking都花了很多時間討論。這是因為Einstein方程對時間來說是對稱的，然而在現實世界，時間是不對稱的。如何在廣義相對論裡定義熵（entropy）是一個重要問題。

今日的演講，由於時間的緣故，不可能包括其他有趣的數學，尤其是與工程有關的數學。然而很明顯的，應用數學需要建立在基本數學上。反過來說，好的工程問題，尤其是現代的電子計算機會提供基礎數學不可代替的幫助，而有意義的應用數學的問題也會逐漸變成基礎數學主流的一部分。所以我說二十一世紀的數學是趨向統一的。