§1. 第一类振荡积分.

设$\phi(x)$是$\mathbb{R}^n$上实值光滑函数，ψ是$\mathbb{R}^n$上具有紧支集的C^∞复函数. 定义

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx \qquad \lambda>0.$$

Q: 当入充分大时. $|I(\lambda)| = O(\lambda^{-\alpha})$, $\alpha = ?$

背景介绍. 曲面上诱导的Lebesgue测度的Fourier变换的渐近性

一. 当$n=1$时.

Localization

命题1.1. 设对$\forall\, x\in \operatorname{supp}\psi$, $\phi'(x)\neq 0$. 则

$$I(\lambda) = O(\lambda^{-N}) \qquad (\lambda\to\infty)$$

对所有的非负整数$N\geq 0$成立.

证: 设 $Df(x) = \dfrac{1}{i\lambda\phi'(x)}\dfrac{df}{dx}$. 则 $D^N(e^{i\lambda\phi}) = e^{i\lambda\phi}$

其转置算子(transpose).

$${}^tDf(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{i\lambda\phi'(x)}\right)$$

于是

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda\phi}\psi\,dx = \int D^N(e^{i\lambda\phi})\psi\,dx = \int e^{i\lambda\phi}({}^tD)^N(\psi)dx.$$

故 $|I(\lambda)| \leq A_N\lambda^{-N}$.

Scaling (Van der Corput)

命题1.2. 设 ϕ 是 (a,b) 上实值光滑函数，对 $\forall x\in(a,b)$

$|\phi^{(k)}(x)|\geq 1$. 则

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}.$$

在以下条件成立.

(i) $k\geq 2$

或 (ii) $k=1$. 且 $\phi'(x)$ 单调.

这里 C_k 不依赖于 ϕ, λ 及区间 (a,b)

证: 先证(ii).

设 $Df(x)=\frac{1}{i\lambda\phi'(x)}\frac{df}{dx}$.

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx=\int_a^b De^{i\lambda\phi}dx=\int_a^b e^{i\lambda\phi}\,{}^tD(1)\,dx+\underbrace{(i\lambda\phi')^{-1}e^{i\lambda\phi}\Big|_a^b}_{\frac{2}{\lambda}}$$

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}\,{}^tD(1)\,dx\right|=\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}\cdot\frac{1}{i\lambda}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)dx\right|$$

$$\leq\frac{1}{\lambda}\int_a^b\left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\right|dx=\frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'}\right)dx\right|$$

$$=\frac{1}{\lambda}\cdot\left|\frac{1}{\phi'(b)}-\frac{1}{\phi'(a)}\right|\leq\frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right|\leq 3/\lambda$$

再证(i), 对 k 作归纳法. 设 $k=l$ 时, 命题成立. 当 $k=l+1$ 时. 不妨设对 $\forall x\in(a,b)$, $\phi^{(l+1)}(x)\geq 1$.

设 $x=c\in[a,b]$ 为 $|\phi^{(l)}(x)|$ 达到最小值的点.

若 $\phi^{(l)}(c)=0$. 则当 $x\notin(c-\delta,c+\delta)$ 时. $|\phi^{(l)}(x)|\geq\delta$..

$$\int_a^b = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^b$$

由归纳假设

$$\left|\int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\phi}dx\right| = \left|\int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\delta\cdot\frac{\phi}{\delta}}dx\right| \le C_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}$$

同理 $\left|\int_{c+\delta}^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \le C_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}$.

又 $\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\phi}dx\right| \le 2\delta$，故

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \le \frac{2C_k}{(\lambda\delta)^{\frac{1}{k}}} + 2\delta.$$

若 $\phi^{(k)}(c)\neq 0$，则 c 为 $[a,b]$ 其中一端点，于是

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \le \frac{C_k}{(\lambda\delta)^{\frac{1}{k}}} + \delta.$$

取 $\delta = \lambda^{-\frac{1}{k+1}}$，则

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi}dx\right| \le (2C_k+2)\lambda^{-\frac{1}{k+1}}. \qquad C_1=3.\quad C_k = 5\cdot 2^{k-1}-2$$

推论1.3. 若 ϕ 满足 Prop. 1.2，则

$$\left|\int_a^b e^{i\phi(x)}\psi(x)dx\right| \le c\lambda^{-\frac{1}{k}}\left[\psi(b) + \int_a^b|\psi'(x)|dx\right]$$

证：令 $F(x) = \int_a^x e^{i\lambda\phi(t)}dt$. $F'(x) = e^{i\lambda\phi(x)}$ $\quad |F(x)| \le C_k\lambda^{-\frac{1}{k}}$.

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx\right| = \left|\int_a^b F'(x)\psi(x)dx\right| = \left|\int_a^b \psi(x)dF(x)\right|$$

$$\le \left|F(x)\psi(x)\Big|_a^b\right| + \left|\int_a^b F(x)d\psi(x)\right|$$

$$\le c\lambda^{-\frac{1}{k}}\left(|\psi(b)| + \int_a^b|\psi'(x)|dx\right)$$

3. Asymptotics.

命题 1.3. 设 $k\geq 2$ 且

$$\phi(x_0)=\phi'(x_0)=\cdots=\phi^{(k-1)}(x_0)=0 \quad 而 \quad \phi^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

且 suppψ 包含在 x_0 的充分小的邻域. 则

$$I(\lambda)=\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx \sim \lambda^{-\frac{1}{k}}\sum_{j=1}^{\infty} a_j\lambda^{-\frac{j}{k}}$$

而上式意味, 对 $N\geq 0$, $r\geq 0$,

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^r\left[I(\lambda)-\lambda^{-\frac{1}{k}}\sum_{j=0}^{N} a_j\lambda^{-\frac{j}{k}}\right]=O\left(\lambda^{-r-\frac{N+1}{k}}\right). \quad (\lambda\to\infty)$$

其中 a_j 依赖于 ϕ 和 ψ 在 x_0 点的有限阶导数.

二. 多维情形. Def. 若 $\nabla\phi(x_0) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)\Big|_{x=x_0} = 0$.

则称 x_0 是 Φ 的临界点.

Prop. 1.4. 设 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对 $\forall x \in \operatorname{supp}\psi$.

$$|\nabla_x \Phi| \ge c. \quad 则$$

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x)\,dx = O(\lambda^{-N}) \qquad \lambda\to\infty. \ \forall N \ge 0.$$

证:

对 $\forall x_0 \in \operatorname{supp}\psi$.

$$|\nabla_x \Phi|_{x=x_0} \ge c. \qquad \Big(|y| = \sup_{|x|=1} x\cdot y.\Big)$$

$\exists \xi \in S^{n-1}$, 使 $\xi\cdot(\nabla\phi)(x_0) \ge c$.

$\exists B(x_0)$, 使得. 对 $\forall x \in B(x_0)$. 有 $\xi\cdot(\nabla\phi)(x) \ge \frac{c}{2}$.

于是, 由 ψ 具有紧支集知. 存在有限个 $B(x_j)$, $\xi_j \in S^{n-1}$

及单位划分.

$$\sum_j a_j(x) = 1 \qquad \operatorname{supp} a_j \subseteq B(x_j). \qquad \bigcup_j B(x_j) \supseteq \operatorname{supp}\psi.$$

$$\xi_j\cdot(\nabla\phi)(x) \ge \frac{c}{2} \qquad x\in B(x_j). \ \text{令 } \psi_j(x) = a_j(x)\psi(x)$$

$$I(\lambda) = \sum_j \int e^{i\lambda\phi(x)} \psi_j(x)\,dx.$$

~~对~~ 作坐标变换. 使 $\xi_j = (1, 0, \cdots 0)$. 则在 $\operatorname{supp}\psi_j$ 上 $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right| \ge \frac{c}{2}$

于是 $$|I(\lambda)| = \sum_j \Big|\int \Big(\underbrace{\int e^{i\lambda\Phi(x_1,\dots,x_n)} \psi_j(x_1,\dots x_n)\,dx_1}_{\le C\cdot\lambda^{-N}}\Big) dx_2\cdots dx_n$$

Prop.1.5. 设 $\cancel{\Phi}$ $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\psi \in B(0,1)$.

在 $\operatorname{supp}\psi$ 上，存在 $k=|\alpha|>0$，使 $|\partial_x^\alpha \phi| \geq 1$.

则
$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)\,dx\right| \leq C_k(\phi)\cdot\lambda^{-\frac{1}{k}}\cdot\left(\|\psi\|_{L^\infty}+\|\nabla\psi\|_{L^1}\right).$$

Prop 1.6. 设 $\phi(x_0)=0$. $\nabla\phi(x_0)=0$.

$$\det\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}\right](x_0)\neq 0.$$

若 $\operatorname{supp}\psi$ 包含于 x_0 的充分小的邻域，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x) \sim \lambda^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\lambda^{-j}.$$

非零 Gaussian 曲率的超曲面~~的~~上诱导的 Legesgue 测度的 Fourier 变换.

设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $n-1$ 维. 设 $x_0 \in S$. 作适当平移和旋转变换.变换后将 x_0 移至原点. S 在 x_0 点的切平面为 $x_n = 0$, 在原点附近. S 可表示为

$$x_n = \phi(x_1, \cdots x_{n-1})$$

这里 $\phi \in C_0^\infty$. $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$. , 设 $\nu_1, \cdots \nu_{n-1}$ 为

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(n-1)\times(n-1)}(x_0)$$

的特征值. $\nu_1, \cdots \nu_{n-1}$ 的乘积称为 S 的 Gaussian 曲率.

Th 1.7. 设 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是超曲面. 且其在 S 上每点 Gaussian 曲率非零., $d\mu = \psi\, d\sigma$

则 $|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq A\, |\xi|^{\frac{1-n}{2}}$.

证: 为方便. 用 $(n+1)$ 代替 n. 设

$$x_{n+1} = \phi(x_1, \cdots x_n)$$

则 $d\mu = \psi(1 + |\nabla\phi|^2)^{\frac{1}{2}} dx_1 \cdots dx_n$.

$$\widehat{d\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi, (x, \phi(x))\rangle} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x, \eta)} \Psi(x) dx.$$

其中 $|\lambda| = |\xi| > 0$. $\xi = \lambda\eta$. $\eta \in S^n$.

$$\Phi(x, \eta) = x\cdot\eta = \sum_1^n x_j \eta_j + \phi(x_1, \cdots x_n)\eta_{n+1}$$

以下对 $\eta \in S^n$ 分三种情形.

1. η 充分接近 $\eta_N = (0, \cdots 0, 1)$
2. η 充分接近 $\eta_S = (0, \cdots 0, -1)$
3. η 在其它点.

下面考虑第一种情形.

由 $\nabla_x \Phi(x, y_N) = (y_1, \cdots y_n) + y_{n+1} \nabla \phi(x)$ 及 $\nabla \phi(0) = 0$ 知

$$\nabla_x \Phi(x, y_N)\Big|_{x=0} = 0.$$

Claim: 当 y 充分接近 y_N 时. 对 $\forall y$. $\exists x = x(y)$ 使

$$\nabla_x \Phi(x, y)\Big|_{x=x(y)} = 0.$$

因为

$$\det\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_k}\right]_{(0)}^{y_N} = \det\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j}\right]_{(0)} \neq 0.$$

由隐函数定理 (implicit function Theorem) 知: 当 y 充分接近 y_N 时.

$$\det\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j \partial x_j}\right](x(y). y) \neq 0.$$

对 $x_0 = x(y)$ 利用 Prop 1.6. 知第一种情形下 Th 1.7 成立.

第二种类似.

而对第三种情形. 注意此时 $\nabla \phi(x) = O(x)$. $(x \to 0.)$ 于是当 ψ 支撑充分小时. $|\nabla_x \Phi(x. y)| \geq \frac{1}{2}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geq C > 0.$

利用 Prop. 1.4. 有 $|\widehat{d\mu}(\xi)| \leq A\,|\xi|^{-N}$. 对 $\forall N \geq 0$.

故 Th 1. 7. 成立.

§2. 第二类振荡积分.

设 $\Phi(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. $\psi(x,\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

若在 $\operatorname{supp}\psi$ 上

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_j}\right) \neq 0$$

~~则称~~

定义 $T_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \psi(x,\xi) f(x)\, dx.$

则称 $T_\lambda f$ 为非退化的振荡积分算子.

Th 1.1. 若 $T_\lambda f$ 为非退化的, 则

$$\|T_\lambda(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le A\lambda^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

推论 1.2. 若 $1 \le p \le 2$. 则 $\|T_\lambda f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{-\frac{n}{p'}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

证: 由 Th 1.1 及

$$\|T_\lambda f\|_{L^\infty} \le C\|f\|_{L^1}$$

利用插值定理即可.

若 $\Phi = \langle x, y\rangle$. 则 $\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\right\} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$

令 $x \to \frac{x}{\sqrt{\lambda}}$. $\xi \to \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}$. 则

$$\left\| \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \psi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\right) f(x)\, dx \right\|_{p'} \le C\|f\|_p$$

若取 $\psi(0,0)=1$. 令 $\lambda \to \infty$. 即可得到

$$\|\hat{f}\|_{p'} \le C\|f\|_p$$

即 Hausdorff-Young 不等式.

关于条件 $\det\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial\xi_j}\right]\neq 0$ 的几何~~解释~~叙述.

位相函数 Φ 所对应的典则关系 (canonical relation).

$$C_\Phi = \{(x, \Phi'_x(x,\xi); \xi, -\Phi'_\xi(x,\xi))\} \subset T^*\mathbb{R}^n \times T^*\mathbb{R}^n.$$

C_Φ 关于辛形式 $d\xi\wedge dx - d\eta\wedge d\xi$ 成为 Lagrangian 流形.

条件 $\det\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial\xi_j}\right]\neq 0$ 等价于两个投影

$$\begin{tikzcd}
 & C_\Phi \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(x,\Phi'_x(x,\xi))\in T^*\mathbb{R}^n & & (\xi,-\Phi'_\xi(x,\xi))
\end{tikzcd}$$

是局部同胚 (local diffeomorphisms).

证明: 由 Taylor 公式知:

$$\nabla_x[\Phi(x,\xi)-\Phi(x,\eta)] = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial\xi_j}\right](\xi-\eta)+O(|\xi-\eta|^2)$$

不妨设 supp~~ψ~~充分小, 而在 supp~~ψ~~上,

$$|\nabla_x[\Phi(x,\xi)-\Phi(x,\eta)]| \geq c|\eta-\xi|.$$

~~由 §1. Prop 1.4 知~~: 下面证 $\|TT^*\| \leq A\lambda^{-n}$.

又 $$(T_\lambda T_\lambda^* f)(\xi) = \int K_\lambda(\xi,\eta)f(\eta)d\eta.$$

其中 $$K_\lambda(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\Phi(x,\xi)-\Phi(x,\eta)]}\psi(x,\xi)\bar{\psi}(x,\eta)dx.$$

由 §1. Prop 1.4 知:

$$|K_\lambda(\xi,\eta)| \leq C_N(1+\lambda|\eta-\xi|)^{-N}, \quad \forall N.$$

引理1.2.

设

$$(Sf)(x) = \int S(x,y) f(y) dy.$$

若 $\sup_x \int |S(x,y)| dy \le 1.$ $\sup_y \int |S(x,y)| dx \le 1.$

则 $\|S\|_{L^2 \to L^2} \le 1.$

$$\|S\| = \sup_{\substack{\|f\|\le 1 \\ \|g\|\le 1}} |\langle Sf, g\rangle| = \sup_{\substack{\|f\|\le 1 \\ \|g\|\le 1}} \left| \int\int S(x,y) f(y) \bar{g}(x) dy dx \right|.$$

$$|fg| \le \frac{|f|^2+|g|^2}{2}.$$

$$\Rightarrow \|S\| \le \frac{1}{2}\left\{ \iint |S(x,y)| |f(y)|^2 dy dx + \iint |S(x,y)| |g(x)|^2 dy dx \right\}$$

$$\le 1.$$

容易验证.

$$\sup_\eta \int |K_\lambda(\xi,\eta)| d\xi \le A' \int_{R^n} \frac{d\xi}{(1+\lambda|\xi|)^N} = A\lambda^{-n}.$$

$$\sup_\xi \int |K_\lambda(\xi,\eta)| d\eta \le A' \lambda^{-n}.$$

故 Th1.1 得证.

§3. 与Fourier变换限制定理相关的振荡积分及其应用

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑子流形. $d\sigma$ 是 S 上诱导的Lebesgue测度.

若存在 $q=q(p)$，使得对任意 $f\in S(\mathbb{R}^n)$，有

$$\left(\int_{S_0}|\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{q}}\le A_{pq}(S_0)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

这里 $S_0\subset S$ 是 S 的开子集 且 $\bar{S}_0\subset S$. 则称对 S L^p 限制性质成立.

对 $f\in S(\mathbb{R}^n)$，$\xi\in S$. $d\mu(\xi)=\psi(\xi)d\sigma$.

$$Rf(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x)dx.$$

其共轭算子.

$$R^*f(x)=\int_S e^{2\pi i x\cdot\xi}f(\xi)d\mu(\xi).$$

要证 $R: L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(S,d\mu)$，只要证 $R^*: L^{q'}(S,d\mu)\to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

~~若 $S=\{(\xi',h(\xi'))\}$ $\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}$, $h(\xi')\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.~~

~~$\xi'=(\xi_1,\cdots\xi_{n-1})$~~

~~则 $R^*f(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{2\pi i(x_1\xi_1+\cdots+x_{n-1}\xi_{n-1}+x_n\cdot h(\xi'))}f(\xi';h(\xi'))\psi(\xi')d\xi'$.~~

若 $S=\{(y,h(y))\}$ $y\in\mathbb{R}^{n-1}$, $h(y)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$

则

$$R^*f(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{2\pi i(x_1y_1+\cdots+x_{n-1}y_{n-1}+x_nh(y))}f(y,h(y))\psi(y)dy.$$

于是 R^* 的有界性归结为以下算子的研究

$$T_\lambda f(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i\lambda\phi(x,y)}\psi(x,y)f(y)dy. \qquad (1)$$

其中 $\psi(x,y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1})$. $\phi(x,y)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n-1})$ 是实的.

下面考虑相函数 $\phi(x,y)$ 的条件

对于 $(x^0, y^0) \in \operatorname{supp}\psi$，定义 $R^{n-1} \times R^n$ 上的双线性形式

$$B(v,u) = \langle v, \nabla_y \rangle \langle u, \nabla_x \rangle \phi(x,y)\big|_{(x^0,y^0)}$$

其中 $v=(v_1,\dots,v_{n-1})$，$\langle v,\nabla_y\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \nabla_{y_i}$，$\langle u,\nabla_x\rangle$ 类似定义

二次形 $B(v,u)$ 具有最大 rank $n-1$.　　(2)

于是存在唯一的 $\bar{u}\in R^n$，$|\bar{u}|=1$.（不考虑 $\bar{u}$ 的符号）

使得函数

$$y \longrightarrow \langle \bar{u}, \nabla_x \phi(x^0, y)\rangle \qquad (3)$$

在 $y=y^0$ 点有一临界点. 进一步假定在 $y=y^0$ 点

$$\det\left\{\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\langle \bar{u}, \nabla_x \phi(x^0,y)\rangle\right\} \neq 0.$$

定理3.1. 设 $T_\lambda f$ 满足以上条件 (2),(3)，若 $n\geq 3$，$1\leq p\leq 2$.

$q = \frac{n+1}{n-1} p'$，则

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(R^n)} \leq C_p \lambda^{-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^p(R^{n-1})}. \qquad (4)$$

为证定理3.1. 先证 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

Prop. 3.2. 设 $0<r<n$. $1<p<q<\infty$. $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{n-r}{n}$.

则

$$\left\|\int_{R^n}\frac{f(x-y)}{|y|^{n-r}}\,dy\right\|_{L^q(R^n)} \leq A_{p,q}\|f\|_{L^p(R^n)}$$

证明: $[f * |y|^{-r}](x) = \int_{|y|\leq R} + \int_{|y|>R}$.

$$\int_{|y|\le R} f(x-y)|y|^{-r}dy = \int f(x-y)|y|^{-r}\chi_{B(R)}(y)dy$$

$$\le (Mf)(x)\cdot\int_{|y|\le R}|y|^{-r}dy = cR^{n-r}(Mf)(x).$$

$$\int_{|y|>R} f(x-y)|y|^{-r}dy.$$ （Hölder不等式）

$$\le \|f\|_{L^p(R^n)}\cdot\||y|^{-r}\chi_{{}^cB(R)}(y)\|_{L^{p'}(R^n)}$$

又 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{n-r}{n}$，故 $\frac{-n+p'r}{np'}=\frac{1}{q}>0 \Rightarrow p'r>n$.

故 $|y|^{-r}\chi_{{}^cB(R)}(y)\in L^{p'}(R^n)$. 且 $\cancel{\||y|^{-r}\chi}\left(\int_{|y|>R}|y|^{-rp'}dy\right)^{\frac{1}{p'}}=cR^{-\frac{n}{q}}$.

于是

$$|f*|y|^{-r}(x)| \le A\left[(Mf)(x)\cdot R^{n-r}+\|f\|_{L^p}R^{-\frac{n}{q}}\right]$$

取 $R^{-\frac{n}{p}}=\frac{(Mf)(x)}{\|f\|_{L^p}}$，则

$$|f*|y|^{-r}(x)| \le A\left[(Mf)(x)\right]^{\frac{p}{q}}\cdot\|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{q}}$$

因而

$$\|f*|y|^{-r}\|_{L^q(R^n)}\le A_{pq}\|f\|_{L^p}.$$

定理3.1的证明：

当$p=1$时，(4)式显然成立，由Riesz插值定理只要证

$$\|T_\lambda f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(R^n)} \le c\lambda^{-\frac{n(n-1)}{2(n+1)}}\|f\|_{L^2(R^{n-1})} \quad (5)$$

另一方面

$$(T_\lambda^* g)(y) = \int_{R^n} e^{-i\lambda\phi(x,y)}\overline{\psi}(x,y)g(x)\,dx.$$

(5)等价于证明T_λ^*满足

$$\|T_\lambda^* g\|_{L^2(R^{n-1})} \le C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{2(n+1)}}\|g\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(R^n)} \quad (6)$$

注意

$$\|T_\lambda^* g\|_2^2 = \int_{R^{n-1}} T_\lambda^* g\,\overline{T_\lambda^* g}\,dy = \int_{R^n} \underline{T_\lambda T^* g}\,\underline{\overline{g}}\,dx$$

$$\le \|T_\lambda T^* g\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(R^n)}\cdot\|g\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(R^n)}.$$

故(6)式成立$\Longleftrightarrow$

$$\|T_\lambda T_\lambda^* g\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(R^n)} \le c\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}\|g\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n+3}}(R^n)}. \quad (7)$$

下面证(7)式，记$x=(z,t)\in R^{n-1}\times R$，不妨设对$(x,y)\in \operatorname{supp}\psi$

$$\det\left(\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial y_j}\phi(z,t,y)\right)\ne 0.$$

记

$$T_t^\lambda f(x) = \int_{R^{n-1}} e^{i\lambda\phi(z,t,y)}\psi(z,t,y)f(y)\,dy.$$

则

$$T_\lambda T_\lambda^* g(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^*[g(\cdot,t')](x)\,dt'$$

Claim:

$$\|T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^* f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C|t-t'|^{-1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \qquad (8)$$

$$p = \frac{2(n+1)}{n+3}$$

若(8)式成立，~~因而~~

$$\|T_\lambda T_\lambda^* g(\cdot,t)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}|t-t'|^{-1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}\|g(\cdot,t')\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dt'.$$

于是由 Prop 3.2. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

$$\|T_\lambda T_\lambda^* g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \le C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}|t-t'|^{-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|g(\cdot,t')\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dt'\right|dt$$

$$\le C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\|g(\cdot,t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$ (7)式得证，故(4)得证.

下面证(8)式.

由条件(2)成立知，φ 满足定理2. 条件，故

$$\|T_t^\lambda f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\lambda^{-\frac{n-1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

于是 $$\|T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\cdot\lambda^{-(n-1)}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}. \qquad (9)$$

下面要得到 $T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^*$: $L^1(\mathbb{R}^{n-1}) \to L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ 的范数估计

注意、$T_t^\lambda (T_{t'}^\lambda)^*$ 的核可以表示为：

$$K_{tt'}^\lambda(z,z') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda(\phi(z,t,y)-\phi(z',t',y))} \psi(z,t,y)\overline{\psi(z',t',y)}\,dy.$$

若 ψ 的支撑集充分小，包含在 (x_0,y_0) 的邻域内，下面证

$$|K_{tt'}^\lambda(z,z')| \le C(1+\lambda|(z,t)-(z',t')|)^{-\frac{n-1}{2}}. \qquad (10).$$

记 $\Phi(x,x',y) = \phi(x,y)-\phi(x',y)$.

则 $\Phi(x,x',y) = \nabla_x\phi(x,y)\cdot(x-x') + O(|x-x'|^2)$,

(i) 当 $x-x'$ 属于单位向量 $\overline{v}$ 的充分小的锥邻域时，由条件(3)知：

则 $\det\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_i\partial y_j}\right) \geqslant C.|x-x'|^{n-1}$

故利用命题1.6 得(10)成立.

(ii). 当 $x-x'$ 在 $\overline{v}$ 的锥邻域外时，由于 $x-x'$ 远离 $\overline{v}$,

而 $\nabla_y\nabla_x\phi(x,y)$ 的 rank 为 $(n-1)$. 故

$$|\nabla_y[\phi(x,y)-\phi(x',y)]| \geqslant C|x-x'|.$$

于是对任意的 $N\geq 0$ 有

$$|K_{tt'}^\lambda(z,z')| \le (1+\lambda|(z,t)-(z',t')|)^{-N}.$$

即(10)成立. 故

$$\|T_t^\lambda(T_{t'}^\lambda)^* f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \le C\lambda^{-\frac{n-1}{2}}|t-t'|^{-\frac{n-1}{2}}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (11)$$

对 (9) (11) 利用 Riesz 插值定理. 注意 $\frac{n+3}{2(n+1)}=\frac{\frac{n-1}{n+1}}{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n+1}}{1}$.

$$\lambda^{-\frac{n(n-1)}{n+1}}=(\lambda^{-(n-1)})^{\frac{n-1}{n+1}}(\lambda^{-\frac{n-1}{2}})^{\frac{2}{n+1}}$$

$$|t-t'|^{-1+(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}=(|t-t'|^{-\frac{n-1}{2}})^{\frac{2}{n+2}}$$

即可得到 (8). 定理3.1 证毕.

推论3.2. 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中每点 Gaussian 曲率非零的 C^∞ 超曲面. S_0 是 S 的紧子集, $1\le p\le\frac{2n+2}{n+3}$, $n\ge 3$. $q=(\frac{n-1}{n+1})p'$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. 则

$$\left(\int_{S_0}|\hat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{q}}\le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\quad f\in S(\mathbb{R}^n).$$

证: 由本节开始知. 若 $S=\{(y,h(y)),\ y\in\mathbb{R}^{n-1},\ h(y)\in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\}$

$$R^*f(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{2\pi i(x_1y_1+\cdots+x_{n-1}y_{n-1}+x_nh(y))}f(y,h(y))\psi(y)\,dy.$$

令 $\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{n-1}x_iy_i+x_nh(y)$. 考虑 $T_\lambda g(x)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{i\lambda\phi(x,y)}\psi(x,y)g(y)\,dy$.

则定理3.1 条件满足. 验证条件3, 只要取 $x_0=0$, $\bar{u}=(0,\cdots,0,1)$ 即可.

故由 Th3.1 得

$$\|T_\lambda g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le c\lambda^{-\frac{n}{q}}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

若 $\psi(x,y)=a_0(x)a(y)$. 其中 $a_0\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_0(0)=1$. $a\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$

作变换 $x\to\frac{x}{\lambda}$, 则

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{2\pi i\langle x,(y,hy)\rangle}a_0(\tfrac{x}{\lambda})a(y)g(y)\,dy\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C_p\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

令 $\lambda\to\infty$. 推论3.2 得证. $\left\|\int_S e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}g(\xi)\,d\mu(\xi)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le C_p\|g\|_{L^p(S)}$.

定理3.3. 设 $S=\{\xi,\ \xi_n=Q(\xi')\}$ 是抛物面. 这里 $\xi'=(\xi_1,\cdots\xi_{n-1})\in R^{n-1}$,

$Q(\xi')$ 是 R^{n-1} 的非退化的二次型, $d\mu=d\xi'$, 则对 $f\in L^p(R^n)$, $p=\frac{2n+2}{n+3}$, $n\geq 3$.

$$\left(\int_S |\hat f(\xi)|^2 d\mu\right)^{\frac12}=\left(\int_{R^{n-1}}|\hat f(\xi',Q(\xi'))|^2 d\xi'\right)^{\frac12}\leq A_p\|f\|_{L^p(R^n)}$$

证: 当 $n\geq 3$ 时. 有

$$\left(\int_{|\xi'|\leq 1}|\hat f(\xi',Q(\xi'))|^2 d\xi'\right)^{\frac12}\leq A_p\|f\|_p,\qquad 1\leq p\leq\frac{2(n+1)}{n+3}\quad(12).$$

令 $\delta_{R^{-1}}f(x)=f\left(\frac{x_1}{R},\frac{x_2}{R},\cdots,\frac{x_{n-1}}{R},\frac{x_n}{R^2}\right)$.

则 $\widehat{\delta_{R^{-1}}f}(\xi)=R^{n+1}\delta_R\hat f(\xi)$.

用 $\delta_{R^{-1}}f$ 来代替(12)中的 f, 则

$$\|\widehat{\delta_{R^{-1}}f}(\xi)\|_{L^2(S_1,d\mu)}=R^{n+1}\left(\int_{|\xi'|\leq 1}|\hat f(R\xi',R^2Q(\xi'))|^2 d\xi'\right)^{\frac12}$$

$$=R^{n+1-\frac{n-1}{2}}\left(\int_{|\xi'|\leq R}|\hat f(\xi',Q(\xi'))|^2 d\xi'\right)^{\frac12}$$

$$R^{n+1-\frac{n-1}{2}}\left(\int_{|\xi'|\leq R}|\hat f(\xi',Q(\xi'))|^2 d\xi'\right)^{\frac12}\leq A_p\|\delta_{R^{-1}}f(x)\|_p=A_pR^{\frac{n+1}{p}}\|f\|_p.$$

故 $\left(\int_{|\xi'|\leq R}|\hat f(\xi',Q(\xi'))|^2 d\xi'\right)^{\frac12}\leq A_p R^{\frac{n+1}{p}-\frac{n+3}{2}}\|f\|_p$

因此, 当 $p=\frac{2n+2}{n+3}$ 时, 令 $R\to+\infty$. 定理3.3成立.

Th3.4. (Tomas 对偶定理)

设 $1\le p<2$, $f(x)\in L^p(R^n)$ S是R^n中的光滑曲面

$d\mu$是S上诱导Lebesgue测度. 则对$\forall f\in L^p(R^n)$.

$$\left(\int_S|\hat{f}|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\le C_p\|f\|_{L^p(R^n)} \qquad (13)$$

成立的充要条件是

对$\forall F\in L^2(d\mu)$.

$$\|(Fd\mu)^\wedge\|_{L^q(R^n)}\le C_q\left(\int_S|F|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (14).$$

这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证: $\Rightarrow$ 对$\forall f\in L^p(R^n)$, $(1\le p<2)$. $F\in L^2(d\mu)$

$$\left|\int_S\hat{f}(\xi)F(\xi)d\mu(\xi)\right|\le\left(\int_S|\hat{f}(\xi)|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_S|F|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le C_p\|f\|_{L^p(R^n)}\left(\int_S|F|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}},\quad 1\le p<2.$$

注意 $\int_S\hat{f}(\xi)F(\xi)d\mu(\xi)=\int_{R^n}f(x)\widehat{Fd\mu}(x)dx$. 则

$$\|\widehat{Fd\mu}\|_{L^q(R^n)}\le C\left(\int_S|F|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.\quad F\in L^2(d\mu).\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

$\Leftarrow$. 由 Hölder 不等式.

$$\left|\int_S\hat{f}Fd\mu\right|=\left|\int_{R^n}f\,\widehat{Fd\mu}\,dx\right|\le\|f\|_p\cdot\|\widehat{Fd\mu}\|_q$$

$$\le C_q\|f\|_p\left(\int_S|F|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

故 $\left(\int_S|\hat{f}|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\le C\|f\|_p \qquad 1\le p<2.$

Th3.5. (Strichartz 估计).

设 $p=\frac{2(n+2)}{n+4}$, $f(x)\in L^2(R^n)$. $g(t,x)\in L^p(R^{n+1})$

记 $u(t,x)$ 是线性 Schrödinger 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} iu_t+\Delta u=g(t,x), & x\in R^n,\ t\in R. \\ u(0,x)=f(x). & x\in R^n. \end{cases}$$

的解. 则 $u\in L^q(R^{n+1})$, $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$. 且

$$\|u\|_{L^q(R^{n+1})}\le C(\|f\|_2+\|g\|_p). \quad q=\frac{2(n+2)}{n}.$$

证明: 由 Duhamel 规则知

$$u(t,x)=S(t)f(x)+\int_0^t S(t-\tau)g(\tau,x)d\tau.$$

这里 $S(t)f=e^{it\Delta}f=F^{-1}(e^{-4\pi^2 i|\xi|^2t}Ff)$

$$=\int_{R^n}e^{2\pi i(x\cdot\xi-2\pi|\xi|^2t)}\hat{f}\,d\xi.$$

令 $S=\{(\xi,\tau),\ \tau+2\pi|\xi|^2=0\}$ 是 R^{n+1} 中的抛物面.

则

$$S(t)f=\int_S e^{2\pi i\bar{x}\cdot\bar{\xi}}\hat{f}(\bar{\xi})d\mu(\bar{\xi})=F^{-1}(\hat{f}d\mu).$$

这里 $d\mu(\bar{\xi})=\delta(\tau+2\pi|\xi|^2)d\tau d\xi$. $\bar{x}=(x,t)$ $\bar{\xi}=(\xi,\tau)$.

由 Fourier 变换的限制定理得: 当 $p=\frac{2n+4}{n+4}$, $h\in L^p(R^{n+1})$ 时

$$\left(\int_S|\hat{h}|^2d\mu\right)^{\frac{1}{2}}\le C\|h\|_{L^p(R^{n+1})}.$$

又由 Th3.4 得：

$$\| S(t)f \|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})} = \| \mathcal{F}^{-1}(\hat{f} d\mu) \|_q \le C_q \| \hat{f} \|_2 = C_q \| f \|_2.$$

另一方面，注意到

$$\| S(t)f \|_\infty = \| (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4ti}} * f \|_\infty \le C \cdot |t|^{-\frac{n}{2}} \| f \|_1$$

又 $\| S(t)f \|_2 = \| f \|_2$.

对以上两式利用插值定理得

$$\| S(t)f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C t^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \| f \|_p . \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

利用 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式.

$$\| \int_0^t S(t-\tau) g(\xi,\tau) d\tau \|_{L^q(\mathbb{R}^{n+1})}$$

$$\le C \| \int_0^t |t-\tau|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \| g \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} d\tau \|_{L^q(\mathbb{R})}$$

$$\le C \| g \|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

§4. Bochner—Riesz 平均

定义 $f\in S(R^n)$ 的Fourier变换

$$\hat{f}(\xi)=\int_{R^n}f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx.$$

其反演公式

$$f(x)=\int_{R^n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi.$$

而对 $f\in L^p(R^n)$，其反演公式不一定成立. ~~因此~~ 但 ~~有些~~ 可以利用求和法，使得当 δ 充分大时

$$f(x)=\lim_{R\to\infty}\int_{|\xi|\le R}\hat{f}(\xi)\left(1-\frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^\delta e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi.$$

因此，考虑下列算子

$$(S^\delta f)(x)=\int_{|\xi|\le 1}\hat{f}(\xi)(1-|\xi|^2)^\delta e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

在 $L^p(R^n)$ 中的有界性.

显然以上算子可以写成

$$(S^\delta f)(x)=f*K^\delta(x)$$

其中 $$K^\delta(x)=\int_{|\xi|\le 1}(1-|\xi|^2)^\delta e^{-2\pi i x\cdot\xi}d\xi$$

$$=\frac{\Gamma(1+\delta)}{\pi^\delta}|x|^{-\frac{n}{2}-\delta}J_{\frac{n}{2}+\delta}(2\pi|x|)$$

其中 $$J_m(r)=\frac{(\frac{r}{2})^m}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\pi^{\frac{1}{2}}}\int_{-1}^{1}e^{itr}(1-t^2)^{m-\frac{1}{2}}dt.$$

为Bessel函数.

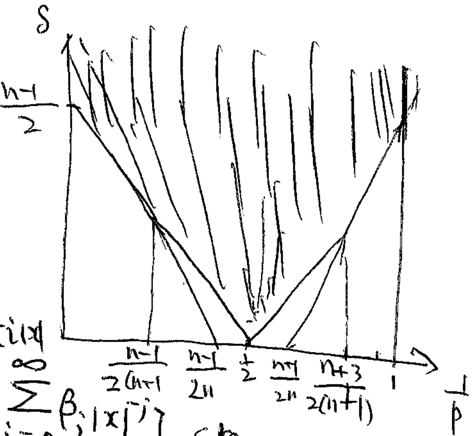
而由 $J_m(r)=O(r^{-\frac{1}{2}})$ 知，当 $\delta>\frac{n-1}{2}$ 时，$K^\delta(x)\in L^1(R^n)$，$S^\delta f$ 是 $L^p(R^n)$ 到 $L^p(R^n)$ 上的有界算子。故 $\delta_0=\frac{n-1}{2}$ 称为临界指标。

当 $0<\delta<\frac{n-1}{2}$ $n\geq 3$ 时，有以下结果。

定理4.1 设 $\frac{2n}{n+1+2\delta}<p<\frac{2n}{n-1-2\delta}$ 且

$$1\leq p\leq \frac{2(n+1)}{n+3} \quad \text{或} \quad \frac{2(n+1)}{n-1}\leq p\leq\infty$$

则 $S^\delta f$ 是 $L^p(R^n)$ 到 $L^p(R^n)$ 上的有界算子。



证明 Th4.1 的证明用到以下渐近展开：

$$K^\delta(x)\sim|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\Big[e^{2\pi i|x|}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j|x|^{-j}+e^{-2\pi i|x|}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j|x|^{-j}\Big] \quad (1)$$

对算子 $\cancel{\delta}$ $S^\delta f$ 的讨论归结为以下算子

$$(G_\lambda f)(x)=\int_{R^n}e^{i\lambda|x-y|}\psi(x-y)f(y)\,dy,$$ 其中 $\psi\in C_0^\infty(R^n)$ 在原点附近为0。

对算子 $G_\lambda f$，先证明

引理4.2 设 $1\leq p\leq\frac{2n+2}{n+3}$，则

$$\|G_\lambda f\|_{L^p}\leq A\lambda^{-\frac{n}{p'}}\|f\|_{L^p}. \quad (2)$$

为证(1). 修正算子G_λ. 设

$$(\bar{G}_\lambda f)(x) = \int_{R^n} e^{i\lambda|x-y|}\tilde{\psi}(x,y)f(y)dy.$$

其中 $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(R^n \times R^n)$. 且 $\mathrm{supp}\,\tilde{\psi} \cap \{(x,y).\ x=y\} = \Phi$.

设 $x' = (x_1, \cdots x_{n-1}) \in R^{n-1}$. $x = (x', x_n) \in R^n$.

固定 x_n. 记

$$(\bar{G}_\lambda f)(x', x_n) = (T_\lambda^* f)(x').$$

对 $(T_\lambda^* f)(x')$

$$\Phi(x', y) = -(|x'-y'|^2 + |x_n - y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

满足 Th3.1 条件 (2). 若取 $\bar{u} = \dfrac{x-y}{|x-y|}$. 则

Th3.1 条件(3) 成立.

于是由定理 3.1 知:

$$\left(\int_{R^{n-1}} |(\bar{G}_\lambda f)(x', x_n)|^q dx'\right)^{\frac{1}{q}} \le A\lambda^{-\frac{n}{p'}} \|f\|_{L^p(R^n)}$$

$q = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)p'$

$1 \le p \le \frac{2n+2}{n+3}$

注意, $(G_\lambda f)$中~~…~~ 具有紧支集, $p \le q$.

$$\left(\int_{R^{n-1}} |\bar{G}_\lambda f(x', x_n)|^p dx'\right)^{\frac{1}{p}} \le A\lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(R^n)}$$

再对x_n积分得:

$$\|\tilde{G}_\lambda(f)\|_{L^p(R^n)} \le A\lambda^{-\frac{n}{p'}} \|f\|_{L^p(R^n)}$$

故由以上估计得

$$\int_{|x-x_0|\le 1} |(G_\lambda f)(x)|^p dx \le A\lambda^{-\frac{np}{p'}} \int_{|x-x_0|\le C} |f|^p dx.$$

对 x_0 积分知 (2) 成立.

下面继续定理4.1的证明.

$$S^\delta f(x) = f * K^\delta(x)$$

$$= \int_{|y|<1} K^\delta(y) f(x-y) dy + \int_{|y|\ge 1} K^\delta(y) f(x-y) dy = I_1 + I_2$$

当 $|y|<1$ 时 $K^\delta(y)$ 是有界的. 故

$$\|I_1\|_p \le C\|f\|_p.$$

由 (1) 式. 下面只要考虑

$$(Tf)(x) = \int_{|y|\ge 1} e^{\pm 2\pi i|y|} f(x-y)|y|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} dy.$$

设 $\eta(y)=\begin{cases}1 & |y|\le 1\\ 0 & |y|\ge 2\end{cases}$ $\quad\delta(y)=\eta(y)-\eta(2y).$

显然 $\operatorname{supp}\delta \subset (\frac{1}{2}, 2)$. 令 $\delta_j(y)=\delta(\frac{y}{2^j})$.

则 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta_j(y)=1$, $y\ne 0$. 令 $\psi(y)=|y|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\delta(y)$.

则 $$|y|^{-\frac{n+1}{2}-\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(\frac{n+1}{2}+\delta)k}\psi(\frac{y}{2^k})$$

记
$$(T_k f)(x) = 2^{-[\frac{n+1}{2}+\delta]k}\int e^{2\pi i|y|} f(x-y)\,\psi\!\left(\frac{y}{2^k}\right)dy$$

则
$$(Tf)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(T_k f)(x).$$

由引理4.2、得:

$$\|T_k f\|_{L^p} \le 2^{-(\frac{n+1}{2}+\delta)k}\,\|G_{2\pi 2^k} f\|_{L^p}\cdot 2^{nk}$$

$$\underset{C}{\le} 2^{-(\frac{n+1}{2}+\delta)k+nk}\cdot (2^k)^{-\frac{n}{p'}}\|f\|_{L^p}.$$

$$\le C\cdot 2^{-(\frac{n+1}{2}+\delta+\frac{n}{p'}-n)k}\|f\|_{L^p}$$

当 $\frac{n+1}{2}+\delta+\frac{n}{p'}-n>0$，即 $p>\frac{2n}{n+1+2\delta}$ 时

$\sum_{k=0}^{\infty}\|T_k\|$ 收敛，故当 $1\le p\le\frac{2(n+1)}{n+3}$，$p>\frac{2n}{n+1+2\delta}$ 时

定理4.1成立. 另一方面，由对偶定理知当 $\frac{2(n+1)}{n-1}\le p<\infty$

$p<\frac{2n}{n-1-2\delta}$ 时定理成立. 故Th4.1得证.